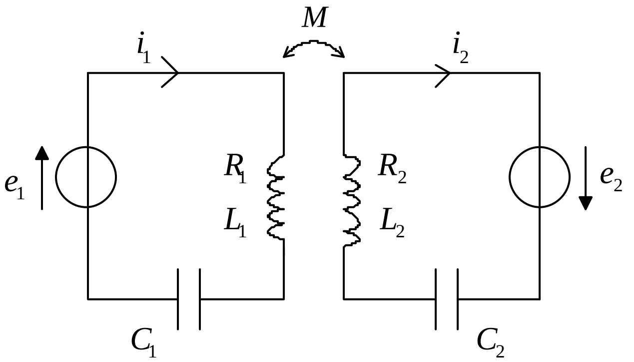
- EXERCICE 28.9 -

- **ENONCE :** « Circuits R-L-C couplés par induction »



On considère deux circuits R-L-C couplés par mutuelle induction (coefficient M).

1) a) écrire les équations différentielles auxquelles satisfont $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

b) on se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation w ; mettre le système d'équations sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 \end{pmatrix}$$

c) en déduire l'expression de $\underline{i}_2$ en fonction de $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, M et de :

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\left(L_1 w - \frac{1}{C_1 w}\right) \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = R_2 + j\left(L_2 w - \frac{1}{C_2 w}\right)$$

2) On considère maintenant que $e_2(t) = 0$ et $e_1(t) = V\cos(wt)$; de plus, les deux circuits sont « accordés » : $L_1 C_1 = L_2 C_2 = \dfrac{1}{w_0^2}$

On pose:

$$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{L_1 w_0}{R_1} \ ; \quad Q_2 = \dfrac{L_2 w_0}{R_2} \ ; \quad Q = \dfrac{2Q_1 Q_2}{Q_1 + Q_2} \\ k = \dfrac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \ ; \quad a = \dfrac{w - w_0}{w_0} \ ; \quad x = 2Qa \\ n^2 = 4 \times \dfrac{(1 + k^2 Q_1 Q_2) Q_1 Q_2}{(Q_1 + Q_2)^2} \end{cases}$$

a) que représentent les grandeurs introduites ci-dessus ?

b) après calculs, on montre que : $r = \dfrac{I_2(w)}{I_2(w_0)} = \dfrac{n^2}{\sqrt{(n^2 - x^2)^2 + 4x^2}}$

($I_2(w)$ et $I_2(w_0)$ représentent des **valeurs efficaces**)

Pour n fixé, étudier la variation de r en fonction de x (on fera apparaître une valeur critique pour n).

c) dans le cas où r est maximum pour deux pulsations w_1 et w_2, montrer que w_1 et w_2 sont symétriques par rapport à w_0.

d) calculer le rapport $\frac{w_1 - w_2}{w_0}$ (on prendra $w_1 \succ w_2$).

3) On prend maintenant $Q_1 = Q_2 = Q$:

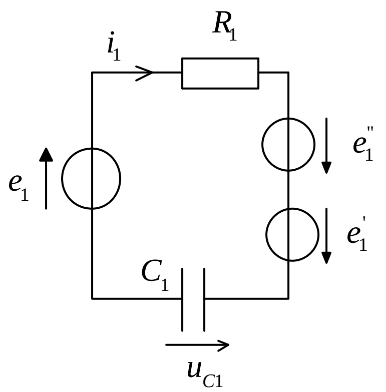
a) montrer que plus le facteur de qualité Q est grand, plus le phénomène « apparition de deux maximums » (pour la courbe $r(w)$) a lieu pour un couplage « lâche » (k faible).

b) étudier la variation du rapport $\frac{w_1 - w_2}{w_0}$ en fonction de k (à Q fixé), puis en fonction de Q (à k fixé) ; calculer enfin $(w_1 - w_2)_{\max}$.

****

• **CORRIGE :** « Circuits R-L-C couplés par induction »

1) a) En tenant compte de la fem d'auto-induction $e_1^{'}$ et de la fem de mutuelle induction $e_1^{''}$ (en adoptant la convention **générateur**), le schéma électrocinétique équivalent au circuit (1) est le suivant :



Avec : $e_1^{'} = -L_1 \dfrac{di_1}{dt}$ et $e_1^{''} = -M \dfrac{di_2}{dt}$

Par ailleurs : $i_1 = C_1 \dfrac{du_{C1}}{dt}$

La loi des mailles fournit alors : $$\boxed{e_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \times \int i_1 dt + M \frac{di_2}{dt}}$$

Une démarche analogue appliquée au circuit (2) conduit à : $$\boxed{e_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \times \int i_2 dt + M \frac{di_1}{dt}}$$

Rq : on obtient deux équations différentielles couplées.

b) Le passage en complexe permet d'obtenir le système suivant :

$$\begin{cases} \underline{e}_1 = \underline{Z}_1 \times \underline{i}_1 + jMw\underline{i}_2 \\ \underline{e}_2 = \underline{Z}_2 \times \underline{i}_2 + jMw\underline{i}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & jMw \\ jMw & \underline{Z}_2 \end{bmatrix}$$

c) On a alors :

$$\begin{pmatrix} \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \underline{Z}_2 & -jMw \\ -jMw & \underline{Z}_1 \end{bmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}} \begin{pmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\underline{i}_2 = \frac{-jMw\underline{e}_1 + \underline{Z}_1 \times \underline{e}_2}{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 + M^2 w^2}}$$

2) a) Q_1 et Q_2 représentent les **facteurs de qualité** respectifs des circuits (1) et (2) ; Q est un facteur de qualité « moyen » ; k est le **coefficient de couplage** des deux circuits : k varie entre 0 et 1, plus k est petit, plus le couplage est « lâche » et plus k est grand, plus le couplage est « serré » ; w_0 est la **pulsation de résonance** en intensité de chacun des deux circuits, **s'ils n'étaient pas couplés** ; a représente **l'écart relatif** à cette pulsation w_0 ; x et n sont des grandeurs permettant de simplifier les expressions obtenues (x représente l'écart relatif en pulsation, « amplifié » par le facteur de qualité, et n prend en compte l'influence du facteur de qualité **et** du coefficient de couplage).

b) Remarque préliminaire : dans le cas présent, on a $\underline{i}_2 = \dfrac{-jMw\underline{e}_1}{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 + M^2w^2} \Rightarrow$

$$I_2(w) = \frac{MwV}{\left|\left[R_1 + j\left(L_1 w - \dfrac{1}{C_1 w}\right)\right] \times \left[R_2 + j\left(L_2 w - \dfrac{1}{C_2 w}\right)\right] + M^2 w^2\right|} \quad \text{et} \quad I_2(w_0) = \frac{M w_0 V}{R_1 R_2 + M^2 w_0^2}$$

$\Rightarrow$ après « quelques » calculs, on trouve effectivement l'expression proposée pour $r = \dfrac{I_2(w)}{I_2(w_0)}$.

A n fixé, nous allons donc étudier la fonction $r(x)$:

* la fonction est continue et paire
* $r(x) \to 0$ pour $x \to \pm\infty$
* cherchons les extremums de $r(x)$, qui coïncident avec ceux de $(n^2 - x^2)^2 + 4x^2$

il faut donc que : $2(n^2 - x^2)\times(-2x) + 8x = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\begin{cases} x = 0 \quad \text{ou} \\ x = \pm\sqrt{n^2 - 2} \quad \text{pour } n \geq \sqrt{2} \end{cases}}$

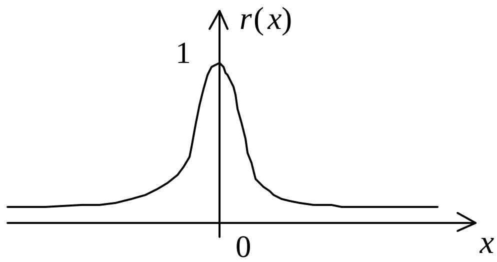
Rq1 : $n = \sqrt{2}$ est donc la valeur critique demandée

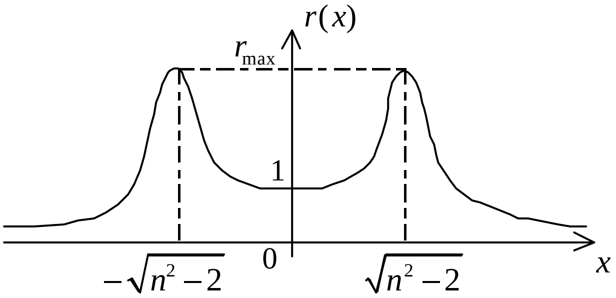
Rq2 : pour $n \prec \sqrt{2}$, $x = 0$ correspond à un **maximum** puisque $r(0) = 1 \succ r(\infty) = 0$

pour $n \succ \sqrt{2}$, $x = 0$ correspond à un **minimum** puisque $r(\pm\sqrt{n^2 - 2}) = \dfrac{n^2}{2\sqrt{n^2 - 1}}$,

et que $\dfrac{n^2}{2\sqrt{n^2 - 1}} \succ 1 = r(0)$, pour $n \succ \sqrt{2}$.

On peut résumer les résultats précédents par les deux courbes suivantes :





Rq : pour n suffisamment élevé, les deux circuits présentent **deux fréquences de résonance**, différentes de leur fréquence de résonance « propre » (pour un couplage nul).

c) $w_1 = w_0 + \dfrac{w_0}{2Q} x_1$ et $w_2 = w_0 + \dfrac{w_0}{2Q} x_2 = w_0 - \dfrac{w_0}{2Q} x_1$ (puisque $x_2 = -x_1$) $\Rightarrow$ on en déduit que w_1 et w_2 sont **symétriques** par rapport à la pulsation w_0.

d) On a alors : $\boxed{\dfrac{w_1 - w_2}{w_0} = \dfrac{1}{2Q}(x_1 - x_2) = \dfrac{1}{Q}\sqrt{n^2 - 2}}$

3) a) On a alors : $n^2 = 1 + k^2Q^2$; l'apparition du « phénomène » ayant lieu pour $n^2 = 2$, on en déduit que :

$$k^2Q^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{k = \frac{1}{Q}}$$

Ainsi, plus le facteur de qualité Q est grand, plus le dédoublement de la pulsation de résonance a lieu pour une valeur faible du coefficient de couplage k : un bon facteur de qualité signifie moins de pertes relatives par effet Joule, c'est-à-dire un meilleur échange énergétique (de type électromagnétique) au sein de chacun des deux circuits $\Rightarrow$ même un couplage faible suffit pour modifier les propriétés de résonance de ces circuits.

b) On a par ailleurs : $\dfrac{w_1 - w_2}{w_0} = \dfrac{1}{Q}\sqrt{n^2 - 1} = \sqrt{k^2 - \dfrac{1}{Q^2}}$; d'où :

* $\boxed{Q \text{ fixé}}$: $\dfrac{w_1 - w_2}{w_0}$ varie comme $k \Rightarrow$ si $k \nearrow$, les pulsations de résonance w_1 et w_2 se séparent d'autant plus, et s'éloignent de w_0.

* $\boxed{k \text{ fixé}}$: $\dfrac{w_1 - w_2}{w_0}$ augmente également avec Q.

* enfin, avec $Q \to \infty$ et $k = 1$, on obtient : $\boxed{(w_1 - w_2)_{max} = w_0}$

****